5Є

УДК 519.85

Ол-ра О. Ємець
Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава, Україна
yemets2008@ukr.net

Дві властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм

У статті розглядаються нові властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм.

Вступ

У задачах комбінаторної оптимізації [1-3], які важливі для систем штучного інтелекту, останнім часом зріс інтерес до використання нечітких множин [4-12].

У роботі [10] введені, а в роботах [11-13] використані необхідні в комбінаторній оптимізації на нечітких множинах з дискретним носієм операції та відношення.

Постановка задачі

Подальше використання цих операцій в комбінаторній оптимізації поставило ряд питань. Для введених в [10] суми нечітких чисел з дискретним носієм, лінійного порядку $\prec$ на них мають місце властивість ([10], теорема 6): для будь-яких трьох нечітких чисел x, y, z з дискретним носієм, у яких сума значень функції належності дорівнює одиниці, якщо $x \prec y$, то $x+z \prec y+z$. Виникає питання: наскільки суттєвим є обмеження, що сума значень функції належності має бути одиницею. Відповідь на це питання є **метою даної статті**.

Друге питання виникає при використанні операцій з [10] в переборних методах (типу методу гілок і меж): якщо $x \prec y$, а нечітке число z має додатні елементи носія, чи виконується властивість $x \prec y+z$ для суми та лінійного порядку з [10]. Використання цієї властивості в методі гілок та меж дозволило б організувати відсікання безперспективних множин допустимих розв'язків: якщо оцінка y гірша оцінки x, то її «збільшення» $y+z$ залишиться «гірше» x, тому в такому випадку працює відсікання підмножини.

Це друге питання, яке є **метою даної статті**.

Необхідні означення і факти

Дамо необхідні для викладу матеріалу означення та наведемо необхідні твердження з [10].

Означення 1. Нечітким числом a називають нечітку множину виду $a=\{(a_1\,|\,\mu_1),\dots,(a_k\,|\,\mu_k)\}$, де $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, $a_i \in R^1$, $\forall i \in J_k$ – носій нечіткої множини, $\{\mu_1,\mu_2,...,\mu_k\}$, $\mu_i \in R^1$, $\forall i \in J_k$ – множина значень функції приналежності, $0 \le \mu_i \le 1$, $\forall i \in J_k$. Тут і надалі через J_k позначається множина перших k натуральних чисел.

Суму $A+B$ двох нечітких чисел $A=\{(a_1\mid\mu_1^A),...,(a_\alpha\mid\mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1\mid\mu_1^B),...,(b_\beta\mid\mu_\beta^B)\}$ утворимо за допомогою побудови множини пар

$$\tilde{C}=\{(\tilde{c}_1\mid\mu_1^{\tilde{C}}),\ldots,(\tilde{c}_\eta\mid\mu_\eta^{\tilde{C}})\}=$$

$$=\left\{\left(a_1+b_1\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_1+b_\beta\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\right.$$

$$\left(a_2+b_1\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_2+b_\beta\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),$$

$$\ldots,$$

$$\left.\left(a_\alpha+b_1\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_\alpha+b_\beta\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right)\right\}. \qquad (1)$$

Перші елементи $\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta$, де $\eta=\alpha\beta$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C}^*=\{\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C}^*)$ мультимножини $\tilde{C}^*$: $S(\tilde{C}^*)=\{c_1,\ldots,c_r\}$ – це носій нечіткого числа $A+B=\{(c_1\mid\mu_1),\ldots,(c_r\mid\mu_r)\}$. Значення функції приналежності знаходять за правилом:

$$\mu_t=\sum_{\forall i\in J_\eta:\, c_t=\tilde{c}}\mu_i^{\tilde{C}},\quad i\in J_\eta,\quad t\in J_r. \qquad (2)$$

Тобто значення μ_t визначають як суму таких чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i=c_t$, а r – число різних елементів в $\tilde{C}^*$.

Таким чином, можна дати таке означення.

Означення 2. Сумою $A+B$ двох нечітких чисел A і B називається нечітке число $C=\{(c_1\mid\mu_1),...,(b_\gamma\mid\mu_\gamma)\}$, де $\{c_1,\ldots,c_r\}=S(\tilde{C}^*)$, – основа мультимножини $\{\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta\}$, яке визначається за правилом (1), а значення μ_t визначається за (2).

В [10] показано, що $A+B=B+A$, тобто сума є комутативною операцією.

Означення 3. Сумою трьох нечітких чисел $A=\{(a_1\mid\mu_1^A),...,(a_\alpha\mid\mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1\mid\mu_1^B),...,(b_\beta\mid\mu_\beta^B)\}$ та $D=\{(d_1\mid\mu_1^D),\ldots,(d_\delta\mid\mu_\delta^D)\}$ називають нечітке число $A+B+D=E+D$, де $E=A+B$.

В [10] доведено, що введена сума є асоціативною.

Означення 4. Характеристичним порівнювачем $H(x): X\to R^1$ нечіткого числа $A=\{(a_1\mid\mu_1^A),...,(a_\alpha\mid\mu_\alpha^A)\}$ називають функцію, яка нечіткому числу $A\in X$ ставить у відповідність число $H(A)\in R^1$ за правилом:

$$H(A) = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A}. \quad (3)$$

Зауваження. В [10] характеристичний порівнювач називався характеристичною функцією. У зв'язку з використанням в літературі останнього словосполучення в інших сенсах термінологію змінено.

Нехай задано два нечіткі числа: $A = \{(a_1 \mid \mu_1^A),...,(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A)\}$ і $B = \{(b_1 \mid \mu_1^B),...,(b_\beta \mid \mu_\beta^B)\}$. Позначимо $a = \{a_1,\ldots,a_\alpha\}$, $b = \{b_1,\ldots,b_\beta\}$, $u = a \bigcup b = \{u_1,\ldots,u_\gamma\}$. Тоді, число A можна записати у вигляді $A^u = \{(u_1 \mid \mu_1^{A^u}),\ldots,(u_\gamma \mid \mu_\gamma^{A^u})\}$, де $\mu_i^{A^u} = \begin{cases} \mu_j^A, & \text{якщо } u_i = a_j \in a \\ 0, & \text{якщо } u_i \notin a \end{cases}$. Число B запишемо у вигляді: $B^u = \{(u_1 \mid \mu_1^{B^u}),\ldots,(u_\gamma \mid \mu_\gamma^{B^u})\}$, де $\mu_i^{B^u} = \begin{cases} \mu_j^B, & \text{якщо } u_i = b_j \in b \\ 0, & \text{якщо } u_i \notin b \end{cases}$.

Наведемо означення впорядкованості нечітких чисел.

Означення 5. Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за зростанням ($A < B$), якщо:

а) або $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} < \frac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \cdot \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$, тобто, коли $H(A) < H(B)$;

б) або $H(A) = H(B)$, тобто $\frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \cdot \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$, але $\mu_1^{A^u} = \mu_1^{B^u}$, …, $\mu_k^{A^u} = \mu_k^{B^u}$, $\mu_{k+1}^{A^u} < \mu_{k+1}^{B^u}$, ($k < \gamma$), і казати, що A передує B за зростанням.

Означення 6. Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за неспаданням (позначається $A \prec B$), якщо:

а) або $A < B$;

б) або $A = B$, тобто тоді, коли $a_i = b_i$ і $\mu_i^A = \mu_i^B$, $\forall i$.

В [10] доведено, що порядок є лінійним, тобто рефлексивним, антисиметричним та транзитивним.

Доведені такі теореми.

Теорема 5 з [10]. Для будь-яких двох нечітких чисел $A = \{(a_1 \mid \mu_1^A),...,(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A)\}$, $B = \{(b_1 \mid \mu_1^B),...,(b_\beta \mid \mu_\beta^B)\}$ і характеристичного порівнювача H, заданого за правилом (3), має місце

$$H(A+B) = H(A) + H(B). \quad (4)$$

Теорема 6 з [10]. Для будь-яких трьох нечітких чисел $x = \{(x_1 \mid \mu_1^x),\ldots,(x_\alpha \mid \mu_\alpha^x)\}$, $y = \{(y_1 \mid \mu_1^y),\ldots,(y_\beta \mid \mu_\beta^y)\}$, $z = \{(z_1 \mid \mu_1^z),\ldots,(z_\gamma \mid \mu_\gamma^z)\}$, таких, що $\sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k^x = \sum_{k=1}^{\beta} \mu_k^y = \sum_{k=1}^{\gamma} \mu_k^z = 1$, $x_1 < \ldots < x_\alpha$, $y_1 < \ldots < y_\beta$, $z_1 < \ldots < z_\gamma$, виконується наступне правило: якщо $x \prec y$, то $x + z \prec y + z$.

Доведено (твердження 7 з [10]), що $x \prec y$ тоді і тільки тоді, коли $H(x) \le H(y)$.

Нові властивості суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм

Покажемо, що мають місце позитивні відповіді на питання, що поставлені на початку статті: тобто вказана властивість суми не є суттєвою, а «природна» для «чітких чисел» x, y, z, ($z > 0$) властивість, якщо $x < y$, то $x < y + z$ розповсюджується на нечіткі числа з дискретними носіями і операціями суми та порядку $\prec$, введеними в [10].

Теорема 1. Якщо $A=\{(a_1|\mu_1^A),...(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1|\mu_1^B),...(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$, $C=\{(c_1|\mu_1),...(b_r|\mu_r)\}$, $C = A + B$ за означенням 2, то

$$\sum_{i=1}^{r} \mu = 1 . \tag{5}$$

Доведення. Сума C знаходиться за допомогою множини $\widetilde{C}$ з (1) та підрахунку μ_t $\forall t \in J_r$ за формулою (2). Покажемо, що (5) має місце.

Звернемо увагу, що множники вигляду

$$V_i = \frac{\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} ; \tag{6}$$

$$U_j = \frac{\mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} ; \tag{7}$$

що фігурують у функціях належності, в (1) мають властивості:

$$\sum_{i=1}^{\alpha} V_i = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} = 1; \ \sum_{j=1}^{\beta} U_j = \sum_{j=1}^{\beta} \frac{\mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} = 1 , \tag{8}$$

оскільки знаменники сталі, і після винесення їх за знак сум маємо частки, в яких чисельники рівні знаменникам.

Далі покажемо, що сума значень функції належності в (1) є одиницею, тобто

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} V_i U_j = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \frac{\mu_i^A \mu_j^B}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B} = 1 . \tag{9}$$

Це стає очевидним при використанні геометричної інтерпретації з рис. 1.

Позначимо $V_i U_j = S_{ij}$ і розглянемо цю величину як площу прямокутника зі сторонами V_i та U_j. Тоді (9) – це сума площ $\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} S_{ij}$, а оскільки має місце (8) – довжини сторін квадрата, розбитих на відрізки U_i та V_j відповідно, рівні одиниці, то очевидно, що $\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} S_{ij} = 1$, тобто має місце формула (9). При побудові C за (2) деякі $V_i U_j$ додаються зі зменшенням кількості пар i, j без заміни суми, що утворює (5). Отже, (5) доведено.

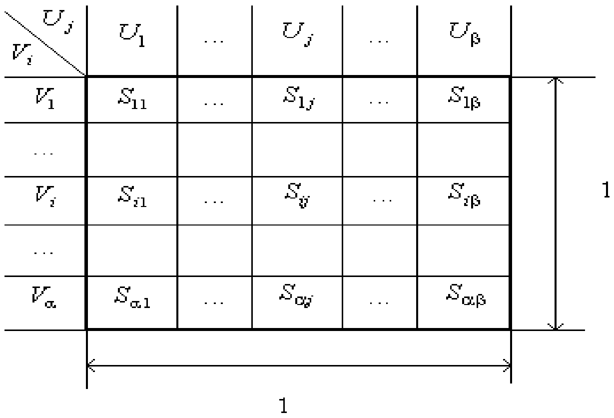


Рисунок 1 – Ілюстрація формули (9)

Зауваження. Отже, вже після першого додавання в сумі декількох нечітких чисел маємо як результат C з властивістю (5). Тобто це дозволяє вважати, що додаються нечіткі числа з такою властивістю (сума значень функції належності рівна одиниці), оскільки належність чи відсутність такої операції не впливає на результат суми. Тому використання теореми 6: якщо $x \prec y$, то $x+z \prec y+z$ для нечітких x, y, z практично не обмежується необхідністю для кожного з них мати властивість (5).

Перейдемо до другої поставленої проблеми. Вона вирішується наступною теоремою.

Теорема 2. Для будь-яких нечітких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),...,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1|\mu_1^B),...,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ та $C=\{(c_1|\mu_1^C),...,(b_\gamma|\mu_\gamma^C)\}$, $c_i \geq 0$ $\forall i \in J_\gamma$ має місце властивість: якщо $A \prec B$, то $A \prec B+C$.

Доведення. За твердженням 7 з [10] $x \prec y$ тоді і тільки тоді, коли $H(x) \leq H(y)$. Отже, якщо $A \prec B$, то

$$H(A) \leq H(B) \qquad (10)$$

і навпаки. За умов теореми маємо: $H(C)$ згідно з (3) є величина додатна:

$$H(C) > 0, \qquad (11)$$

тобто якщо (10) виконано, то з (10) та (11) маємо

$$H(A) \leq H(B) + H(C). \qquad (12)$$

За теоремою 5 [10] формулу (12) переписуємо як

$$H(A) \leq H(B+C). \qquad (13)$$

А за твердженням 7 [10] при $x = A$; $y = B + C$ маємо з (13), що $A \prec B+C$, що і треба було довести.

Висновок

У роботі доведено дві нові властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм, що розширює можливості їх використання при розв'язуванні задач комбінаторної оптимізації в нечіткій постановці.

Як напрям подальших досліджень можна зазначити перевірку аналогічних властивостей для нечітких чисел з континуальним носієм та операцій над ними, розглянутих в [14].

Література

1. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К. : Наукова думка, 2003. – 264 с.

2. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти,1993. – 188 с.
3. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 160 с.
4. Емец О.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О.А. Емец, А.А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 35-44.
5. Ємець Ол-ра О. Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин / Ємець Ол-ра О. // Волинський математичний вісник. Серія : Прикладна математика. – 2004. – Вип. 2(11). – С. 101-106.
6. Ємець О.О. Задача евклідової комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності / О.О. Ємець, А.А. Роскладка, Ол-ра О. Ємець : зб. наук. праць: фізико-математичні науки. – 2005. – Вип.1. – Хмельницький : Хмельниц. нац. ун-т. – С. 40-45.
7. Роскладка А.А. Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами / А.А. Роскладка, А.О. Емец // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 132-141.
8. Ємець Ол-раО. Одна задача упакування як комбінаторна оптимізація на нечіткій множині розбиттів і її розв'язування / Ємець Ол-ра О. // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 150-160.
9. Ємець О.О. Економіко-математична модель однієї задачі теорії розкладів / О.О. Ємець, Ємець Ол-ра О. // Економіка: проблеми теорії та практики : зб. наук. праць. – 2007. – Вип. 233, Т. ІІ. – С. 293-301.
10. Ємець О.О. Операції та відношення над нечіткими числами / О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 5. – С. 39-46.
11. Ємець О.О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – № 6. – С. 25-33.
12. Донец Г.А. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г.А. Донец, А.О. Емец // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 65-76.
13. Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : автореф. канд. фіз.-мат. наук : 01.05.01 / Ємець Ол-ра О. – К. : ІК НАНУ, 2009. – 19 с.
14. Емец О.А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О.А. Емец, Т.А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 86-101.

Literatura

1. Sergienko I.V. Zadachi diskretnoj optimizacii: problemy, metody issledovanija, reshenija. K.: Naukova dumka. 2003. 264 s.
2. Stoyan Yu.H., Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoyi optymizaciyi. K.: In-t systemn. Doslidzhen' osvity. 1993. 188 s.
3. Emec O.A. Kombinatornaja optimizacija na razmeshhenijah. K.: Nauk. dumka, 2008. 160 s.
4. Emec O.A. Kibernetika i sistemnyj analiz. № 5. 2008. S. 35-44.
5. Yemec' Ol-ra O. Volyns'kyj matematychnyj visnyk. Seriya: Prykladna matematyka. Vyp 2(11). 2004. S. 101-106.
6. Yemec' O.O. Zb. nauk. prac': fizyko-matematychni nauky. Vyp.1. Xmel'nyc'kyj: Xmel'nyc. nac. un-t. 2005. S. 40-45.
7. Roskladka A.A. Radioelektronika i informatika. № 2. 2007. S. 132-141.
8. Yemec' Ol-ra O. Radioelektronika i informatika. № 4. 2007. S. 150-160.
9. Yemec' O.O. Ekonomika: problemy teoriyi ta praktyky. Zb. nauk. prac'. Vyp 233. T II. 2007. S 293-301
10. Yemec' O.O. Naukovi visti NTUU "KPI". №5. 2008. S. 39-46.
11. Yemec' O.O. Naukovi visti NTUU "KPI". №6. 2008. S. 25-33.
12. Donec G.A. Problemy upravlenija informatiki. №5. 2009. S. 65-76.
13. Yemec' Ol-ra O. Rozv'yazuvannya zadach kombinatornoyi optymizaciyi na nechitkyx mnozhynax. K.: IK NANU. 2009. 19 s.
14. Emec O.A. Problemy upravlenija i informatiki. № 2. 2010. S. 86-101.

А.О. Емец

Два свойства операции суммы и линейного порядка для нечетких чисел с дискретным носителем

В статье рассматриваются новые свойства операции суммы и линейного порядка для нечетких чисел с дискретным носителем.

O.O. Yemets

Two Properties of Sum Operation and Linear Order for Fuzzy Numbers with Discrete Medium

New properties of sum operation and linear order for fuzzy numbers with discrete medium are considered in the article.

Стаття надійшла до редакції 20.01.2011.